www.fee.bzh

White paper For Engineer Eyes

FEE-WP-018Af – Oct/Nov. 2022

Auteur: J. Pontois

Conversion en bande de base

SOMMAIRE

1. OBJET

Ce document traite de la conversion d'un signal numérique pour le ramener en bande de base (complexe).

Note : extrait du document interne 010-NT-013A de Novembre 2013, passage en « White Paper » en décembre 2021.

2. TRAITEMENTS NUMERIQUES DE BASE

On présente ici quelques structures et traitements de base utilisés dans la conversion en bande de base.

2.1. FILTRES TRANSVERSAUX

Les filtres transversaux ou à réponse impulsionnelle finie (ou FIR pour Finite Impulse Response) sont définis par :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x(n-k)$$

où $x(n)$ représente le signal d'entrée, $y(n)$ le signal de sortie, N le nombre de points de la réponse impulsionnelle.

Leur fonction de transfert en z s'écrit : $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}$

Une structure possible pour leur implémentation est la suivante :

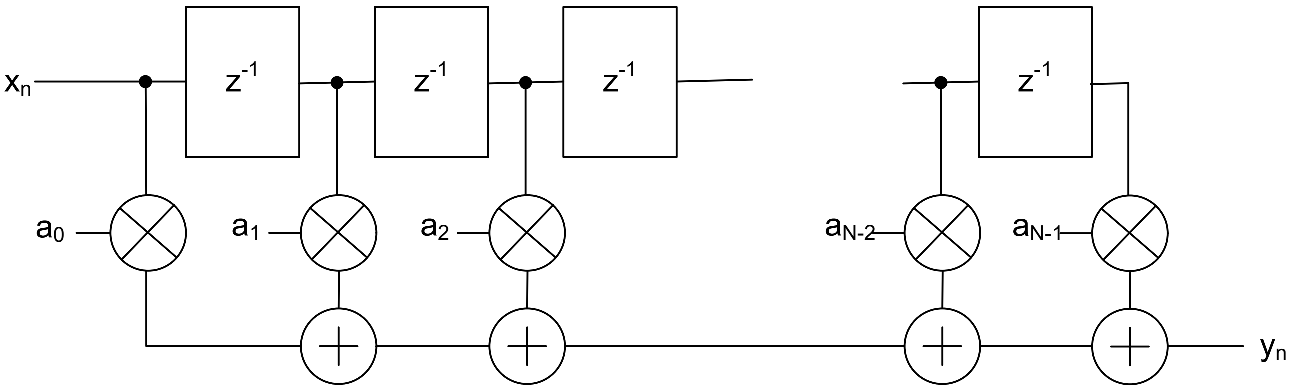


Figure 1 - Implémentation du filtre transversal

Elle consiste en une ligne à retard de $N-1$ cellules dont les sorties sont multipliées par les coefficients a_k avant d'être sommées.

Les principaux avantages de ces filtres sont leur stabilité (inhérente) et la possibilité d'avoir un temps de groupe constant (une réponse impulsionnelle réelle symétrique donnant une réponse en fréquence réelle). Leur principal inconvénient est la puissance de calcul nécessaire à leur implémentation, qui est proportionnelle à la longueur de la réponse impulsionnelle. Cette contrainte peut parfois être allégée en cascadant plusieurs filtres plus simples (factorisation) ou en utilisant des techniques de convolution rapide. Une réponse impulsionnelle symétrique permet également de réduire les ressources nécessaires à leur implémentation, en remplaçant la moitié des multiplieurs par des additionneurs.

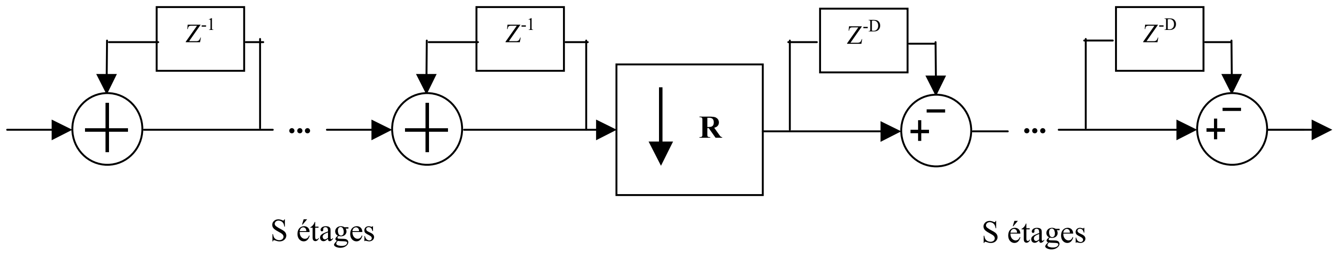
Le calcul de la réponse impulsionnelle permettant d'obtenir une fonction de transfert donnée n'est en général pas direct et peut nécessiter des procédures d'optimisation particulières.

2.2. FILTRES CIC

Les filtres numériques de Hogenauer (ou CIC pour Cascade Integrator Comb) permettent de construire efficacement, à l'aide d'additionneurs et de registres à décalages, des filtres transversaux simples mais d'ordre élevé. Ils sont principalement utilisés dans les opérations de décimation (et d'interpolation) depuis (et vers) des fréquences d'échantillonnages élevées, dans des circuits dédiés ou des FPGA dans lesquels les multiplieurs « coûtent » cher. Dans ces applications, ce sont des filtres passe-bas équivalents à une succession de filtres transversaux de réponse impulsionnelle rectangulaire (ou moyenne glissante: elle vaut 1 sur N points consécutifs, 0 ailleurs).

2.2.1. FILTRE CIC DECIMATEUR

On s'intéresse au filtre décimateur dont la structure est la suivante:



Il s'agit d'une chaîne de S intégrateurs d'équation $y(n)=y(n-1)+x(n)$, suivis d'un décimateur de rapport R (il sous-échantillonne la sortie du dernier intégrateur d'un facteur R), puis d'une chaîne de différentiateurs d'équation $y(n)=x(n)-x(n-D)$.

La fréquence d'échantillonnage en entrée est f_e, la fréquence en sortie est $\frac{f_e}{R}$.

Une structure équivalente de ce filtre est:

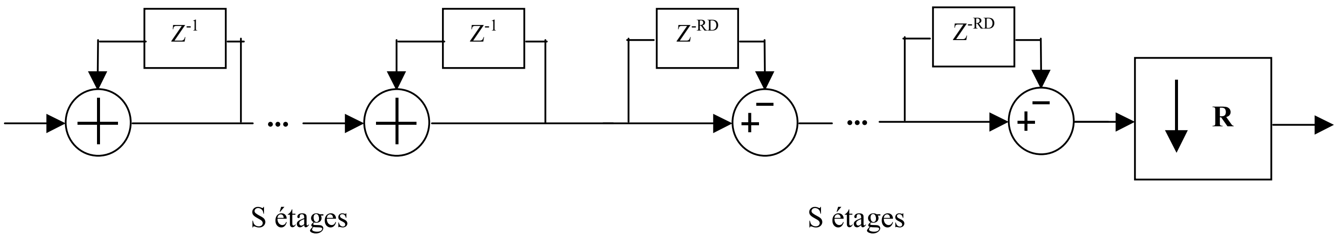


Figure 2 - Structure du CIC décimateur

elle permet d'obtenir la réponse du filtre avant décimation:

$$H(z)=\left(\frac{1-z^{-RD}}{1-z^{-1}}\right)^S=\left(\sum_{k=0}^{k=RD-1} z^{-k}\right)^S$$

Le filtre est équivalent à une chaîne de S filtres identiques de réponse impulsionnelle rectangulaire, de longueur RD. La longueur totale de la réponse impulsionnelle est de $S(RD-1)+1$ points d'entrée.

Sans précautions particulières, la stabilité du filtre est donc assurée si le nombre W de bits des registres du filtre est tel que $W \geq B+S\cdot\log_2(RD)$, où B est le nombre de bits des données d'entrée. Quand S ou R deviennent grands, la taille des nombres à gérer peut être prohibitive. Dans le cas où R n'est pas premier, on peut implémenter une cascade de filtres décimateurs plus petits en tronquant la sortie de chacun sur un nombre de bits adapté au SNR acceptable.

En raison du sous-échantillonnage, une fréquence d'entrée f sera transposée en f' à la sortie, telle que: $f' = f \bmod \left(\frac{f_e}{R}\right)$.

La réponse en fréquence de ce filtre (vu de l'entrée) est:

$$H\left(\frac{f}{f_e}\right) = \left(\frac{1 - e^{-j2\pi RD\frac{f}{f_e}}}{1 - e^{-j2\pi\frac{f}{f_e}}}\right)^S = \left(\sum_{k=0}^{k=RD-1} e^{-j2\pi k\frac{f}{f_e}}\right)^S$$

On a encore : $\left|H\left(\frac{f}{f_e}\right)\right| = \left|\frac{\sin\left(\pi RD\frac{f}{f_e}\right)}{\sin\left(\pi\frac{f}{f_e}\right)}\right|^S$

La réponse est maximale en 0 et vaut $R^S D^S$, les premiers zéros de part et d'autre de l'origine sont $f = \pm\frac{f_e}{RD}$. Pour f faible (ou RD grand), on peut aussi écrire $\left|H\left(\frac{f}{f_e}\right)\right| \approx R^S D^S \left|\mathrm{sinc}\left(RD\frac{f}{f_e}\right)\right|^S$.

Le repliement spectral apporté par le sous-échantillonnage va ramener vers f les fréquences de la forme $f + k\frac{f_e}{R}$, k entier.

Détails d'implémentation :

Les calculs se font modulo 2^W, aucune condition initiale n'est nécessaire (si le contenu des accumulateurs est inconnu, les premiers échantillons seront imprévisibles sur la durée de la réponse impulsionnelle).

2.2.2. FILTRE CIC INTERPOLATEUR

La structure du filtre interpolateur est similaire est celle du décimateur:

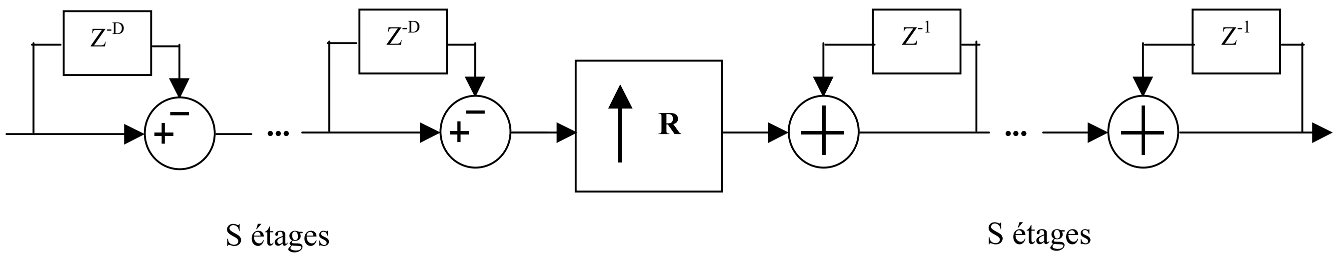
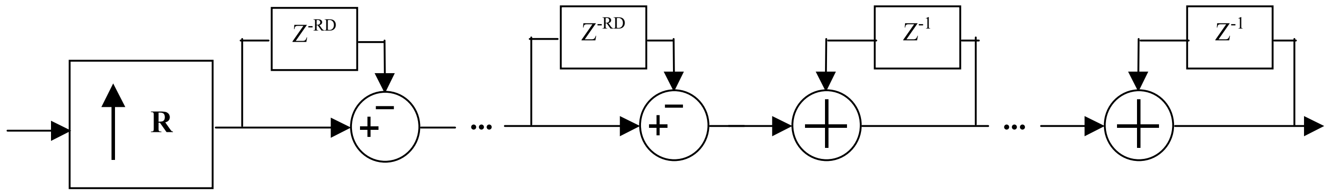


Figure 3 - Structure du CIC interpolateur

qui est équivalente à :



S étages S étages

Le filtre est équivalent à une chaîne de S filtres identiques de réponse impulsionnelle rectangulaire, de longueur RD.
La fréquence d'échantillonnage en entrée est f_e, en sortie $R \cdot f_e$.
En raison du sur-échantillonnage, une fréquence d'entrée f_0 sera transposée en sortie vers toutes les fréquences f telles que: $f = f_0 + k \cdot f_e$, pour k entier.
Le sur-échantillonnage précédant les éléments intégrateurs introduit $R-1$ zéros pour un échantillon à la fréquence d'entrée.

La réponse en fréquence de ce filtre est similaire à celle du filtre précédent, mais vue de la sortie :

$$H\left(\frac{f}{R.f_e}\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{1-e^{-j2\pi RD\frac{f}{Rf_e}}}{1-e^{-j2\pi\frac{f}{Rf_e}}}\right)^S = \frac{1}{R}\left(\frac{1-e^{-j2\pi D\frac{f}{f_e}}}{1-e^{-j2\pi\frac{f}{Rf_e}}}\right)^S = \frac{1}{R}\left(\sum_{k=0}^{k=RD-1} e^{-j2\pi k\frac{f}{Rf_e}}\right)^S$$

En pratique, le sur-échantillonneur maintient la valeur d'entrée sur R échantillons plutôt que d'introduire $R-1$ zéros. Il est alors équivalent à l'ajout d'un filtre de réponse impulsionnelle rectangulaire de longueur R à l'interpolateur précédent. La réponse impulsionnelle du filtre global devient :

$$H\left(\frac{f}{R.f_e}\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{1-e^{-j2\pi D\frac{f}{f_e}}}{1-e^{-j2\pi\frac{f}{Rf_e}}}\right)^S\left(\frac{1-e^{-j2\pi\frac{f}{f_e}}}{1-e^{-j2\pi\frac{f}{Rf_e}}}\right) = \frac{1}{R}\left(\sum_{k=0}^{k=RD-1} e^{-j2\pi k\frac{f}{Rf_e}}\right)^S\left(\sum_{k=0}^{k=R-1} e^{-j2\pi k\frac{f}{Rf_e}}\right)$$

On a encore : $$\left|H\left(\frac{f}{f_e}\right)\right| = R^S D^S \left|\frac{\sin\left(\pi RD\frac{f}{f_e}\right)}{\sin\left(\pi\frac{f}{f_e}\right)}\right|^S \left|\frac{\sin\left(\pi R\frac{f}{f_e}\right)}{\sin\left(\pi\frac{f}{f_e}\right)}\right|$$

La réponse est maximale en 0 et vaut $D^S R^S$, la longueur totale de la réponse impulsionnelle est de $S(RD-1)+R$ échantillons de sortie. Pour f faible (ou RD grand), on peut aussi écrire :

$$\left|H\left(\frac{f}{f_e}\right)\right| \approx R^S D^S \left|\mathrm{sinc}\left(RD\frac{f}{f_e}\right)^S \mathrm{sinc}\left(R\frac{f}{f_e}\right)\right|$$

Sans précautions particulières, la stabilité du filtre est assurée si le nombre W de bits des registres du filtre est tel que $W \geq B + S.\log_2(RD)$, où B est le nombre de bits des données d'entrée. Le cas échéant, la taille des registres des différentiateurs peut cependant être réduite à $B+s$, où s est le numéro d'ordre de l'interpolateur ($s = 1...S$).

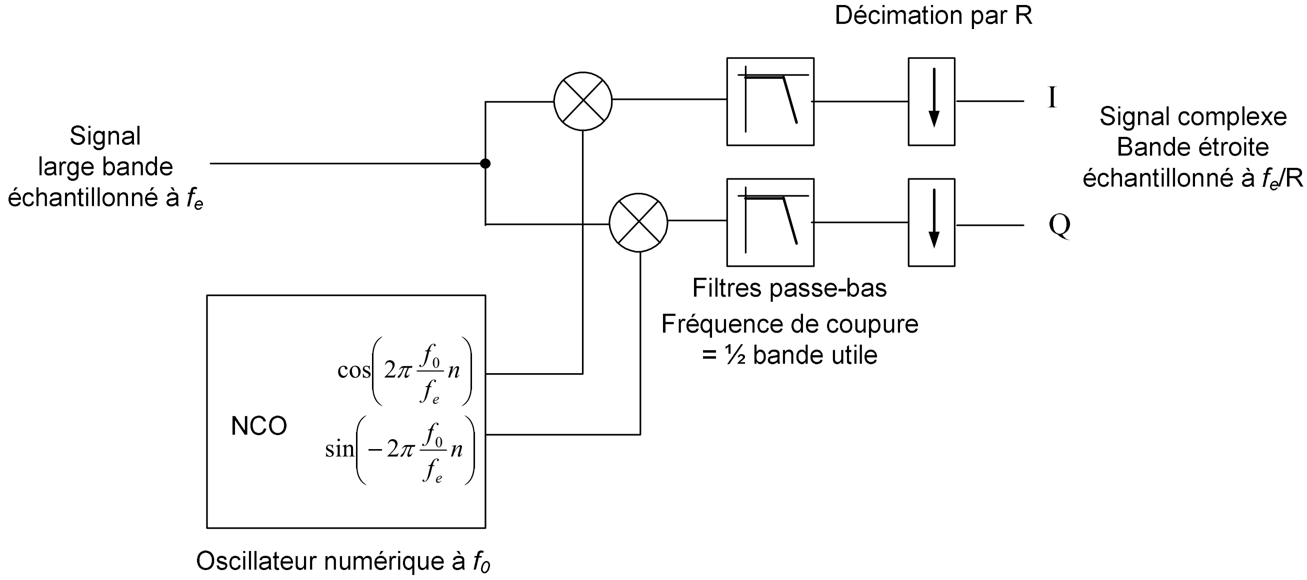
Détails d'implémentation :

Les calculs se font modulo 2^W. Les intégrateurs étant placés après les différentiateurs, un contenu initial non nul perturbera indéfiniment la sortie. Tous les registres doivent être remis à zéro au démarrage.

3. CONVERSION EN BANDE DE BASE

3.1. PRINCIPE DU DEMODULATEUR NUMERIQUE

Le principe de base du démodulateur numérique (ou DDC pour Digital Down Converter) est décrit ci-dessous :



A partir d'un signal numérique réel échantillonné à f_e, on effectue la multiplication par une porteuse complexe de fréquence f_0 générée par un oscillateur numérique (NCO, Numerical Controlled Oscillator). Les deux signaux réels obtenus subissent un filtrage passe-bas avec un sous-échantillonnage (décimation) qui permet d'obtenir un signal complexe en bande de base.

Le DDC est la version numérique d'un démodulateur analogique classique, effectuant la transposition d'un signal vers deux signaux en quadrature (I,Q) en bande de base, mais sans les problèmes d'appariement des voies en amplitude et phase, ou de décalage (DC-offset).

Au signal réel d'entrée on peut bien sûr substituer un signal complexe, en remplaçant les deux multiplieurs réels par un multiplieur complexe.

Le DUC (Digital Up Converter) permettant la transposition d'un signal en bande de base vers la fréquence f_0 possède une structure duale de celle du DDC : passe-bas avec sur-échantillonnage du signal de base complexe, suivi d'une multiplication par une porteuse complexe (seule la partie réelle est utilisée si un signal de sortie réel est désiré…).

Les principaux éléments du DDC, l'oscillateur numérique et le filtre passe-bas sont décrits ci-après.

3.2. OSCILLATEUR NUMERIQUE (NCO)

Voir note FEE-WP002 « Oscillateurs numériques ».

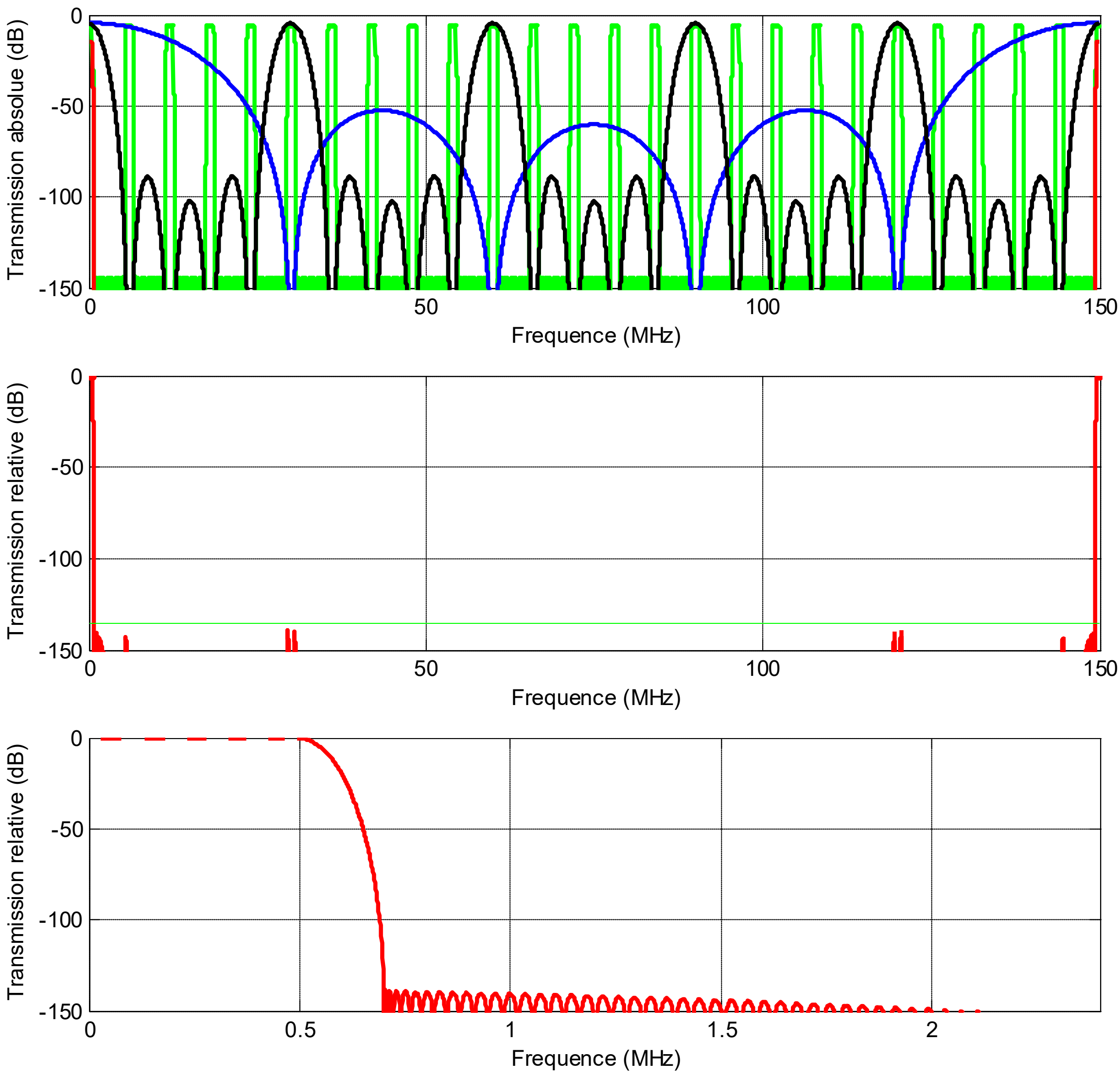
3.3. FILTRE PASSE-BAS

Le filtre passe-bas d'un DDC travaillant avec un facteur de sous-échantillonnage faible est généralement un filtre numérique transversal (ou FIR pour Finite Impulse Response). Quand le sous-échantillonnage est suffisamment élevé, on utilise plutôt une combinaison d'un filtre de Hogenauer (ou CIC pour Cascade Integrator Comb) et d'un filtre transversal. Le filtre CIC, par sa faible complexité, permet un fonctionnement à cadence élevée en demandant relativement peu de ressources matérielles (multiplieurs). Il permet de faire un premier filtrage et un premier sous-échantillonnage, à l'issue desquels un filtre transversal est appliqué pour obtenir la réponse en fréquence désirée.

Le filtre passe-bas d'un DUC (interpolateur) possède la configuration inversée : FIR puis CIC.

A titre d'exemple, on montre ci-dessous la réponse en fréquence globale d'un filtre passe-bas décimateur de DDC, avec les paramètres suivants :

Fréquence d'échantillonnage d'entrée : 100 MHz
Fréquence d'échantillonnage de sortie : 5 MHz (R=20)
Bande passante : 2 MHz
Réjection minimale hors bande : 80 dB



Réponse en fréquence d'un filtre passe-bas de DDC

Le filtre est constitué de la cascade de deux filtres CIC (R=5, D=1, S=4) et (R=5, D=1, S=7) sortant un signal échantillonné à 6 MHz et d'un filtre transversal symétrique de 150 points avec un sous-échantillonnage par 5.

Le graphique supérieur montre la réponse en fréquence vue de l'entrée : la courbe bleue est celle du premier filtre CIC, la courbe noire celle du deuxième filtre CIC, la courbe verte celle du filtre transversal (périodique tous les 6 MHz). La courbe rouge indique la réponse globale. Les autres graphiques donnent donne la réponse globale (normalisée à f=0) dans le spectre entier et avec un détail sur le bas de bande. Avec une fréquence d'échantillonnage de 1.2 MHz et une fréquence de coupure de 0.5 MHz, la bande de transition se situe entre 0.5 et 0.7 MHz (1.2 - 0.5).

Les filtres CIC seuls permettent de filtrer essentiellement les images du signal utile (centrées sur les multiples de 6 MHz), auxquelles leurs zéros ont le bon goût de correspondre. Le filtre transversal effectue l'égalisation en bas de bande et assure la réjection des fréquences faiblement atténuées par les filtres CIC.