

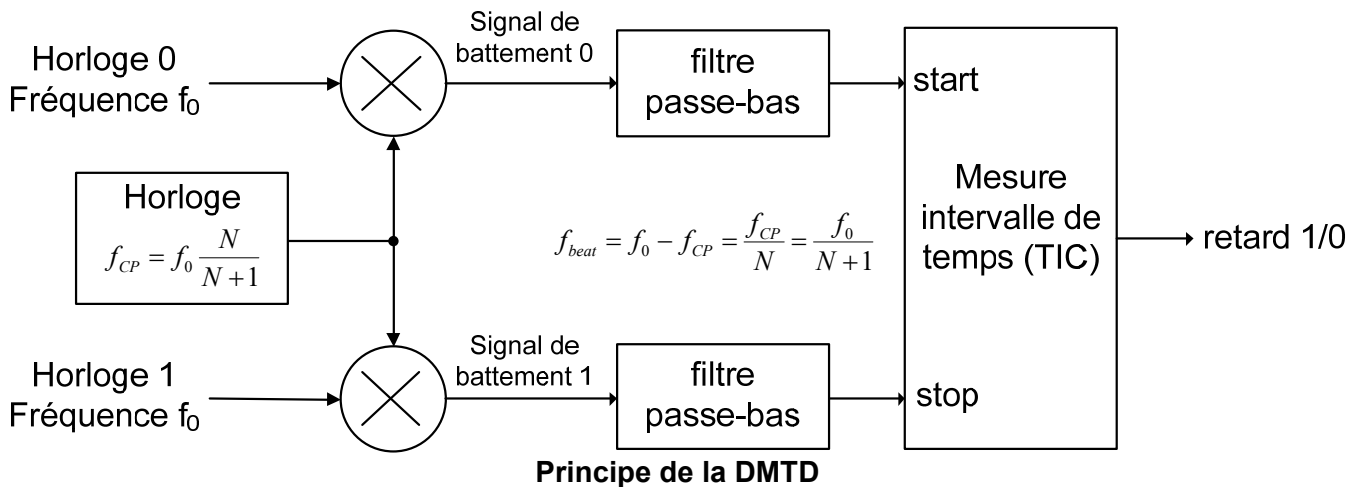
## Arithmetic-DMTD

### Mesure de décalage temporel sub-picoseconde pour signaux d'horloge

#### 1. Introduction

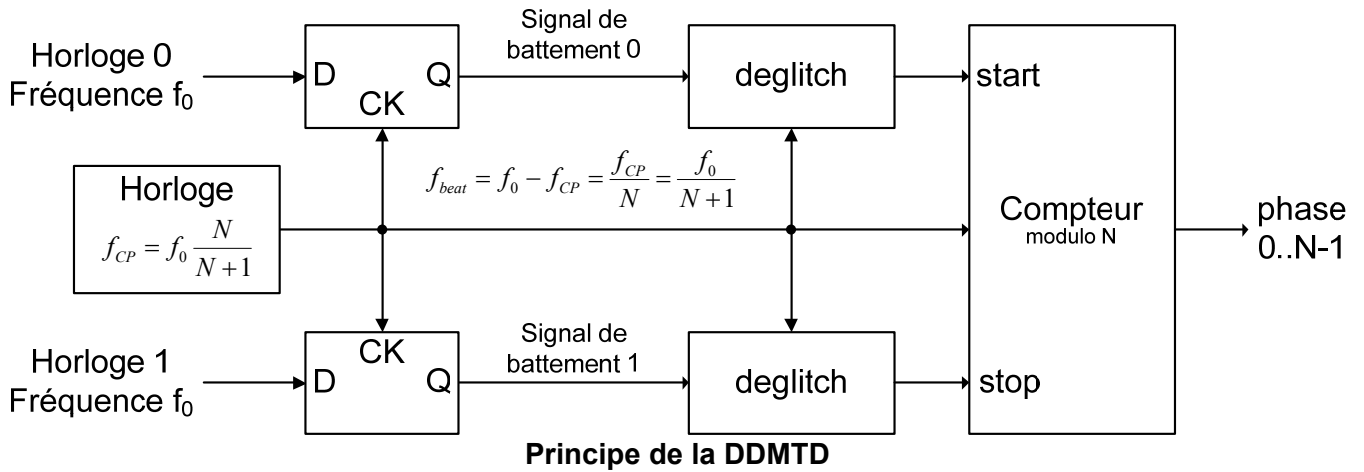
Le dispositif décrit ici est une généralisation de la DDMTD (Digital Dual Mixer Time Difference) utilisée par exemple dans le système White Rabbit du CERN et décrite en [1]. Le but est ici de supprimer le problème du filtrage des « glitches » produits par la méthode, en conservant des ressources FPGA limitées avec une implémentation relativement simple.

Le système DMTD original [2] (analogique) utilise la propriété de conservation de phase de deux signaux d'horloge de fréquence  $f_0$  après mélange par un troisième, de fréquence  $f_{CP}$ . En posant  $f_{beat} = |f_0 - f_{CP}|$ , deux signaux de battement de fréquence  $f_{beat}$  sont produits après mélange et filtrage passe-bas. En choisissant  $f_{beat}$  faible, la différence de phase entre les signaux de battement peut être mesurée avec une grande précision à partir d'un compteur standard (TIC : Time Interval Counter). La DMTD est donc une méthode permettant de mesurer précisément la différence de phase entre deux signaux d'horloges de fréquence  $f_0$ , et applicable même pour  $f_0$  très élevée.



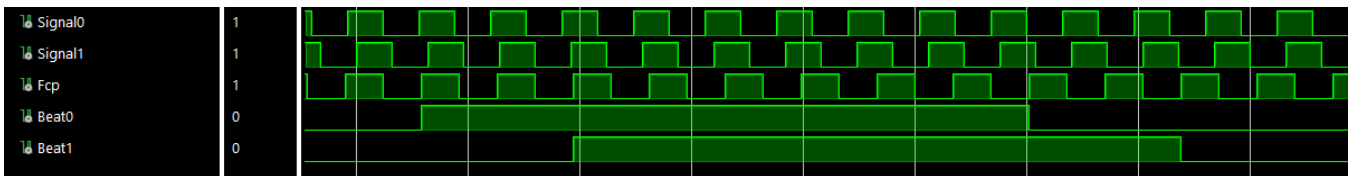
Comme les mélangeurs et surtout les filtres sont des composants analogiques, la DMTD est difficile à intégrer dans de très petits volumes, surtout si de multiples canaux de mesure sont demandés. Il y a donc un besoin pour un équivalent numérique de la DMTD qui soit intégrable en FPGA.

La méthode DDMTD du [1] est basée sur l'échantillonnage des signaux d'entrée (mélange) à une fréquence  $f_{CP}$  proche de leur fréquence, produisant une fréquence de battement. La phase relative étant conservée par le mélange, la mesure consiste ici encore à compter les cycles d'horloge  $f_{CP}$  séparant les fronts montants (ou les fronts descendants) des deux signaux de battement. La fréquence  $f_{CP}$  est typiquement  $f_{CP} = f_0 \frac{N}{N+1}$ , produisant un battement à  $f_{beat} = \frac{f_{CP}}{N}$ .



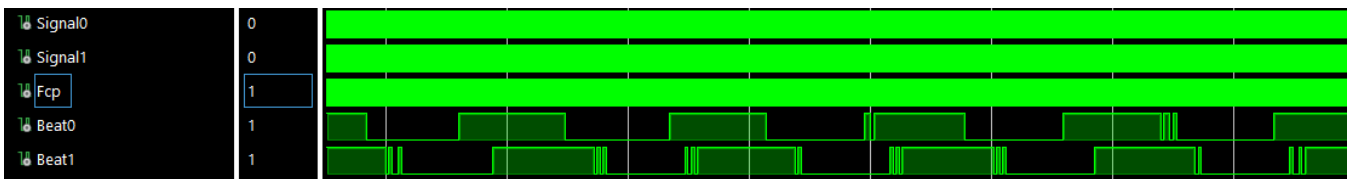
Hors gigue des signaux, la mesure de comptage élémentaire donne une valeur  $m$  entre 0 et  $N$ , avec une incertitude de  $\pm 1$ . La valeur de la phase normalisée (dans  $[0; 1[$  plutôt que dans  $[0; 2\pi[$ ), est alors  $\frac{m \bmod N}{N}$ , et l'incertitude de mesure de la phase normalisée est  $\pm 1/N$ .

Visuellement, les signaux d'entrée sont échantillonnés presque une fois par période, avec à chaque fois un décalage de  $1/N$  période : les signaux sont balayés en  $N$  points d'échantillonnage.



**DDMTD : exemple de signaux pour N=8**

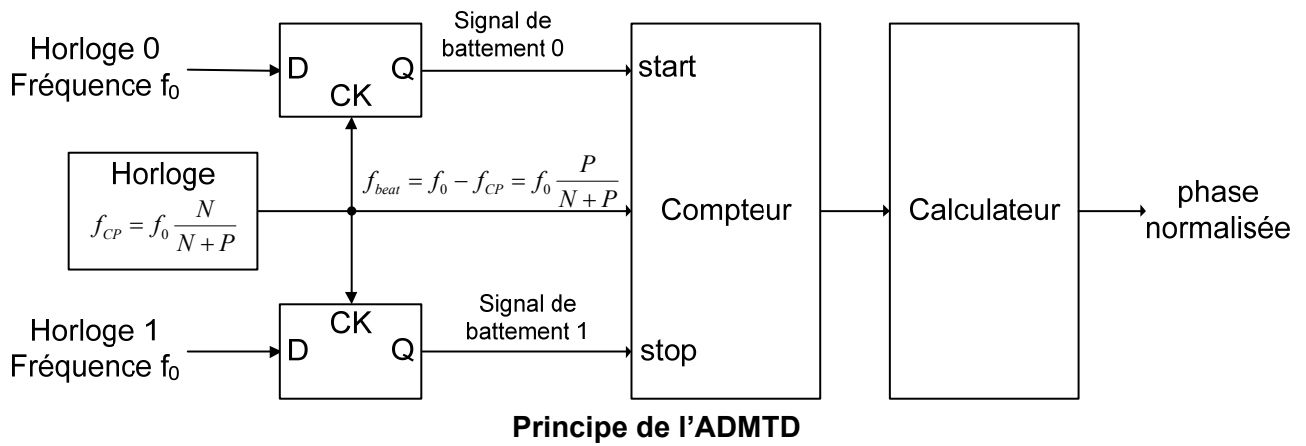
Quand  $N$  devient grand, la gigue sur les signaux génère de multiples transitions au lieu d'une seule quand l'instant d'échantillonnage s'approche des fronts. Ceci limite la précision de la méthode, un système de filtrage des transitions multiples devant alors être mis en place (deglitcher). Différents algorithmes de filtrage sont ainsi proposés dans [1].



**DDMTD : exemple de l'effet de la gigue pour N grand (ici N=32)**

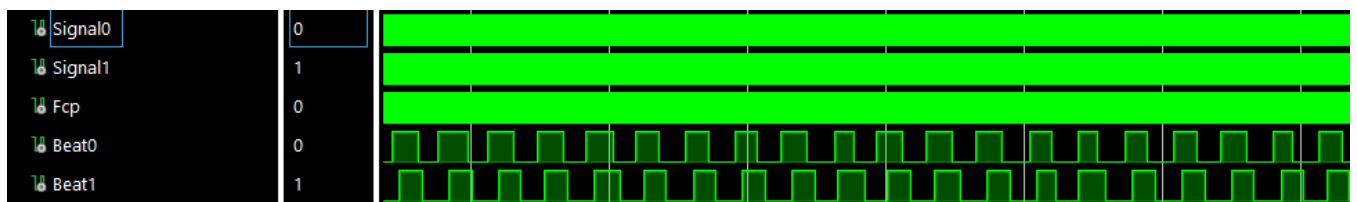
## 2. Le dispositif ADMTD

On peut éviter les « glitches » avec un pas d'échantillonnage supérieur à l'amplitude de la gigue. Ceci peut être obtenu simplement en utilisant une fréquence de mélange de la forme  $f_{CP} = f_0 \frac{N}{N+P}$ , avec  $P \ll N$ ,  $P$  premier avec  $N$ . La période d'échantillonnage est maintenant  $T_{CP} = \frac{1}{f_{CP}} = \frac{N+P}{Nf_0} = T_0 \frac{N+P}{N}$ . Cette méthode est ici nommée ADMTD (Arithmetic DMTD).



La fréquence de battement est ici  $f_{beat} = f_0 - f_{CP} = f_0 \left(1 - \frac{N}{N+P}\right) = f_0 \frac{P}{N+P}$ . Visuellement, les signaux d'entrée sont encore échantillonnés presque une fois par période, avec maintenant un incrément temporel de  $P/N$  période.  $P$  et  $N$  étant premiers entre eux (ie  $nP$  non multiple de  $N$  pour  $n = 0 \dots N - 1$ ), les signaux sont toujours balayés en  $N$  points différents, et la résolution de la mesure est conservée. Par contre, en utilisant un pas d'échantillonnage  $P$  fois plus grand que pour la DDMTD, on évite d'avoir deux échantillonnages successifs à proximité d'un front, quand  $P/N$  est suffisamment grand.

En reprenant l'exemple précédent de la DDMTD ( $N = 32$ ) et en prenant  $P = 5$ , les glitches ne gênent plus le comptage :



**ADMTD : exemple de disparition de la gigue sur le signal de battement**

Hors incertitude d'échantillonnage (hors gigue), chaque mesure élémentaire entre fronts donne une valeur brute  $m_i$  dans  $[0; T_{beat}/T_{CP}]$ , soit typiquement un comptage dans  $\{0 \dots \text{ceil}(N/P)\}$ . La phase normalisée (dans  $\{0 \dots N - 1\}$ ) correspondant à cette mesure est :

$\boxed{m}_i = \left(\frac{m_i T_{CP}}{T_{beat}} N\right) \text{mod } N = (m_i P) \text{mod } N$ . Le choix de  $N$  puissance de 2 simplifie l'implémentation du modulo en FPGA. La présence de l'opération de multiplication (par  $P$ ) donne le nom de la méthode, ici appelée ADMTD (Arithmetic DMTD).

A ce stade, on peut moyennner  $M$  mesures élémentaires pour obtenir la mesure de phase différentielle finale.  $M$  doit être multiple de  $P$  pour assurer une couverture uniforme du balayage.

La phase différentielle normalisée peut s'écrire  $\varphi_N = \text{mean}(\boxed{m}_i)$ . Le calcul de la moyenne s'effectue comme :  $\varphi_N = \text{mean}(\boxed{m}_i) = \frac{\boxed{m}_{i0}}{N} + \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\boxed{m}_i - \boxed{m}_{i0}}{N} = \frac{1}{N} \left( \boxed{m}_{i0} + \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \boxed{m}_i - \boxed{m}_{i0} \right)$ , avec  $\boxed{m}_{i0}$  valeur de centrage obtenue après la première mesure élémentaire (on suppose que les mesures de phase ne sont pas bruitées au point de ne pas être regroupées dans un même quadrant).

On peut écrire la période du signal de battement :

$T_{beat} = \frac{1}{f_{beat}} = \frac{N}{P} T_{CP} = \text{floor}\left(\frac{N}{P}\right) T_{CP} + \frac{N \text{ mod } P}{P} T_{CP}$ . Hors gigue, les erreurs de positionnement d'un front sont  $e_p = \left[ e_0 + \frac{(p(N \text{ mod } P)) \text{ mod } P}{P} T_{CP} \right] \text{mod } T_{CP}$ ,  $p = 0 \dots P - 1$  (le front est toujours détecté après son apparition), avec  $e_0 \in [0; T_{CP}[$  erreur sur le premier front (égale à l'erreur de positionnement obtenue par DDMTD).

Les erreurs sur les  $P$  mesures élémentaires (entre les fronts des deux signaux de battement) sont :

$$\delta_p = \left[ e_0 + \frac{(p(N \bmod P)) \bmod P}{P} T_{CP} \right] \bmod T_{CP} - \left[ e_1 + \frac{(p(N \bmod P)) \bmod P}{P} T_{CP} \right] \bmod T_{CP}$$

avec  $e_1 \in [0; T_{CP}[$  erreur sur le premier front du deuxième signal (égale à l'erreur de positionnement obtenue par DDMTD).

$P$  étant premier avec  $N$ , il l'est également avec  $N \bmod P$ . Le nombre d'erreurs de mesure possibles est donc  $P$  (la séquence échantillonnée du signal de battement se répète tous les  $P$  cycles). On peut lister les  $P$  erreurs de mesure distinctes par :

$$\left\{ \delta_k = \left[ e_0 + \frac{k}{P} T_{CP} \right] \bmod T_{CP} - \left[ e_1 + \frac{k}{P} T_{CP} \right] \bmod T_{CP}, \quad k = 0 \dots P - 1 \right\}$$

Le moyennage de ces  $P$  mesures élémentaires forme une erreur de mesure globale qui peut s'écrire :

$$\delta = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} \delta_k = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} \left[ \left[ e_0 + \frac{k}{P} T_{CP} \right] \bmod T_{CP} - \left[ e_1 + \frac{k}{P} T_{CP} \right] \bmod T_{CP} \right]$$

En posant  $e_0 = \varepsilon_0 + \frac{k_0}{P} T_{CP}$ ,  $0 \leq k_0 < P$ ,  $\varepsilon_0 \in [0; \frac{T_{CP}}{P}[$

et  $e_1 = \varepsilon_1 + \frac{k_1}{P} T_{CP}$ ,  $0 \leq k_1 < P$ ,  $\varepsilon_1 \in [0; \frac{T_{CP}}{P}[$ , on a :

$$\delta = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} \left[ \left[ \varepsilon_0 + \frac{k + k_0}{P} T_{CP} \right] \bmod T_{CP} - \left[ \varepsilon_1 + \frac{k + k_1}{P} T_{CP} \right] \bmod T_{CP} \right]$$

$$\delta = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} \left[ \varepsilon_0 + \left[ \frac{k + k_0}{P} T_{CP} \right] \bmod T_{CP} - \varepsilon_1 - \left[ \frac{k + k_1}{P} T_{CP} \right] \bmod T_{CP} \right]$$

$$\delta = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} \left[ \left[ \frac{k + k_0}{P} T_{CP} \right] \bmod T_{CP} - \left[ \frac{k + k_1}{P} T_{CP} \right] \bmod T_{CP} \right]$$

Soit finalement :  $\delta = \varepsilon_0 - \varepsilon_1$

L'erreur sur la mesure moyenne se simplifie donc en  $\varepsilon_0 - \varepsilon_1$  dans  $]-\frac{T_{CP}}{P}; \frac{T_{CP}}{P}[$ , soit une erreur  $]-T_{CP}; T_{CP}[$  sur la mesure normalisée (après multiplication par  $P$ ). Elle est identique à celle de la DDMTD.

L'amélioration apportée par la ADMTD repose sur le fait qu'en choisissant  $P$  suffisamment grand, la gigue n'apparaît pas dans les mesures élémentaires (pas de transitions parasites). Par ailleurs, le moyennage s'applique aussi à celle-ci et les performances par rapport à la DDMTD classique (qui doit en plus gérer la gigue par des traitements non linéaires) s'améliorent.

La gigue permet par ailleurs, dans le cas où elle est supérieure à  $T_0/N$  et assimilable à un bruit blanc, d'améliorer la précision de la mesure par intégration en augmentant  $M$  (comme pour un CAN où le bruit sur la mesure est grand devant le bruit de quantification). In fine, la valeur maximale utile de  $N$  est limitée par cette gigue.

Dans le cas où les signaux mesurés sont parfaitement symétriques (rapport cyclique 50/50), on peut appliquer la méthode simultanément sur les fronts montants et fronts descendants pour doubler le nombre de mesures élémentaires (réduction de l'incertitude due à la gigue d'un facteur  $\sqrt{2}$ ).

### 3. Cas particuliers, limites et optimisations

Pour  $P = 1$ , on retrouve la DDMTD classique.

La valeur maximale de  $P$  est limitée dans cette description par le moyennage des mesures élémentaires, qui nécessite une valeur de centrage. Dans une implémentation type, la période de battement doit être telle qu'au moins 4 points d'échantillonnage y soient toujours présents, soit  $\frac{T_{beat}}{T_{CP}} > 4$ , ce qui se résume par  $P < N/4$ .

La durée d'observation minimale  $T_M$  pour assurer  $M$  mesures élémentaires est :

$$T_M = (M + 1)T_{beat} = (M + 1) \frac{N + P}{P} T_0 = (M + 1) \frac{N}{P} T_{CP}$$

La méthode requiert une multiplication par  $P$  (modulo  $N$ ) des mesures de comptage élémentaires. L'implémentation peut être simplifiée en préférant par exemple  $P = 2^p \pm 1$  et  $N = 2^n$ , avec  $p < n - 2$ , réduisant la multiplication à un décalage et une addition (ou soustraction) sur  $n$  bits. La division finale par  $M$  des mesures accumulées (au plus une tous les  $(M + 1) \frac{N}{P}$  cycles  $T_{CP}$ ) peut être faite par logiciel ou implémentée directement (registres à décalages, comparateur/soustracteur) pour être calculée en au plus quelques dizaines de cycles. Le cas  $M = 2^m P$  avec  $P = 2^p \pm 1$  peut être particulièrement rapide, en remarquant :

$$\frac{1}{M} = \frac{2^{-m}}{2^p - 1} = 2^{-m} \left( \frac{1}{2^p} + \frac{2^{-p}}{2^p - 1} \right) = 2^{-m-p} (1 + 2^{-p} + 2^{-3p} + 2^{-4p} + \dots)$$

ou

$$\frac{1}{M} = \frac{2^{-m}}{2^p + 1} = 2^{-m} \left( \frac{1}{2^p} - \frac{2^{-p}}{2^p + 1} \right) = 2^{-m-p} (1 - 2^{-p} + 2^{-3p} - 2^{-4p} + \dots)$$

Avec  $p \geq 7$ , par exemple, une précision 32 bits peut être obtenue avec au plus 3 additions.

Au final, pour une implémentation simplifiée (sans multiplieur) de ADMTD dans un FPGA :

On choisit  $N = 2^n$ .

On choisit  $P = 2^p \pm 1$  avec  $p < n - 2$ , et  $T_0 \frac{P}{N}$  doit être supérieur à la gigue crête (signal + horloge  $f_{CP}$ ).

On choisit  $M$  multiple de  $P$  :  $M = 2^m P$

La durée d'observation minimale  $T_M$  pour assurer  $M$  mesures élémentaires est :

$$T_M = (M + 1)T_{beat} = (M + 1) \frac{N + P}{P} T_0 = (M + 1) \frac{N}{P} T_{CP}$$

En prenant  $m > 0$ , on effectue un moyennage de la gigue ; hors gigue, la mesure reste identique au cas  $m = 0$ .

#### 4. Le variant K-ADMTD

Une variante à suréchantillonnage utilise une fréquence d'échantillonnage  $f_{CP} = f_0 \frac{KN}{N+P}$  avec  $N + P$  premier avec  $K$ . Cette méthode est ici nommée K-ADMTD. Elle est constituée de la mise en parallèle de  $K$  sous-systèmes ADMTD alimentés successivement par le signal échantillonné à  $f_{CP}$ . Autrement dit, les  $K$  sous-systèmes ADMTD opèrent avec une fréquence d'échantillonnage  $f_{CP}' = f_{CP}/K$  et des signaux décalés temporellement d'un pas de  $T_{CP} = \frac{1}{f_{CP}} = T_0 \frac{N+P}{KN} = \frac{T_0}{K} \left( 1 + \frac{P}{N} \right)$ . Les mesures des  $K$  sous-systèmes sont ensuite moyennées pour fournir le résultat final. Par rapport à la ADMTD, la résolution et l'incertitude sont améliorées d'un facteur  $K$ .

Alternativement, cette méthode permet la mesure sur des signaux binaires échantillonnés à  $f_0$ , périodiques de période  $K$  (par exemple  $K=2$  pour un signal obtenu par division de  $f_0$  par 2, assurant le rapport cyclique 50/50, autorisant par ailleurs la mesure simultanée sur les fronts montants et descendants).

Au final, pour une implémentation simplifiée (sans multiplieur) de K-ADMTD dans un FPGA :

On choisit  $N = 2^n$

On choisit  $P = 2^p \pm 1$  avec  $p < n - 2$ , et  $T_0 \frac{P}{N}$  doit être supérieur à la gigue crête (signal + horloge  $f_{CP}$ ).  
On doit de plus avoir :  $N + P$  premier avec  $K$ .  
On choisit  $M$  multiple de  $P$  :  $M = 2^m P$

On implémente  $K$  sous-systèmes ADMTD de paramètres  $N, P, M$ . Dans le cas d'une implémentation série (avec  $f_{CP}$  comme fréquence d'horloge), certaines ressources comme les accumulateurs peuvent être mises en commun, une seule mesure élémentaire pouvant être générée par cycle. La mesure est terminée quand chaque sous-système a effectué ses  $M$  mesures élémentaires.  
Une implémentation parallèle permet de fonctionner à une fréquence d'horloge  $f_{CP}/K$  et d'alimenter les  $K$  sous-systèmes par des désérialiseurs.

Dans une vue duale, la méthode ADMTD peut également être directement utilisée en mode sous-échantillonné ( $f_{CP} \approx f_0/K$ ). On a alors  $T_{CP} = K T_0 \frac{N+P}{N} = T_0 \left( K + \frac{KP}{N} \right)$ , la résolution en phase est conservée si  $KP$  est premier avec  $N$ , et la condition sur la gigue devient :  $T_0 \frac{KP}{N}$  doit être supérieur à la gigue crête (signal + horloge  $f_{CP}$ ).

### Références :

[1] P. Moreira and I. Darwazeh, "Digital Femtosecond Time Difference Circuit for CERN's Timing System", University College London

[2] D.W. Allan and H. Daams, « Picosecond time difference measurement system », 29th Annual Symposium on Frequency Control. 1975, pp 404 – 411

### Note :

Ce document de FEE est fourni pour information, sans aucune garantie. Sa copie partielle n'est pas autorisée.