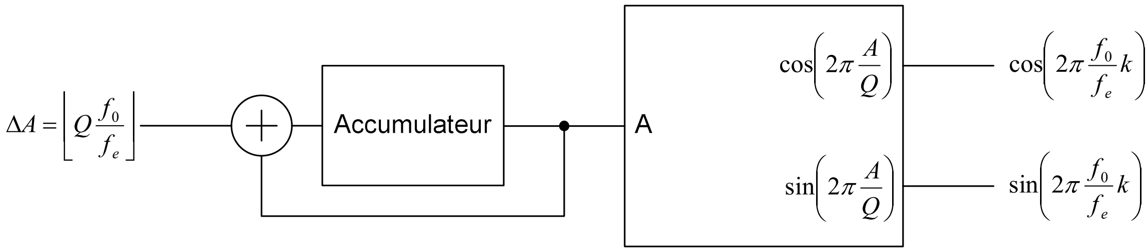
Oscillateurs numériques

1. PRINCIPE

Le principe de base d'un oscillateur numérique classique (ou NCO pour Numerical Controlled Oscillator) à fréquence f_0 pour une fréquence d'échantillonnage f_e est décrit ci-dessous :



Il consiste principalement en un accumulateur travaillant modulo Q, incrémenté à chaque cycle d'une valeur ΔA. Cet accumulateur travaille généralement en base 2 : il stocke un nombre de N bits représentant la phase courante de l'oscillateur, tel que $Q = 2^N$ représente 2π. L'incrément de phase peut être constant (fréquence constante), ou suivre une loi particulière, ce qui permet notamment de générer des sauts ou des rampes de fréquence. La valeur courante A de l'accumulateur est utilisée pour calculer $\cos\left(2\pi \frac{A}{Q}\right)$ et $\sin\left(2\pi \frac{A}{Q}\right)$, qui constituent la sortie du NCO complexe. Ce calcul peut être effectué :

- par indexation d'une table pré-calculée,
- par calcul direct (utilisation d'algorithmes de CORDIC dans les FPGA et circuits câblés)
- par des méthodes mixtes (combinaison de plusieurs tables pré-calculées de faible taille).

Le choix de la méthode de calcul est fonction de la résolution du mot de sortie et de la vitesse de génération.

Le NCO est principalement caractérisé par la résolution de l'incrément de phase (précision en fréquence) et la résolution de la sortie (précision en amplitude).

On définit également le SFDR (Spurious-Free Dynamic Range) de l'oscillateur comme étant le ratio (en dBc) de la porteuse générée et de la plus forte raie parasite. Le SFDR est limité par la résolution de la sortie et des valeurs trigonométriques, il peut être amélioré par des techniques de « dithering » qui ajoute un faible bruit de phase en sortie d'accumulateur afin d'étaler en fréquence les raies parasites.

2. EXTENSION A D'AUTRES BASES QUE 2

Outre le cas $Q = 2^N$, on peut aussi imaginer un NCO travaillant avec $Q = b^N$, b entier. On utilise plutôt dans ce cas des tables pré-calculées. Quand Q est grand, la table d'exponentielles complexes peut nécessiter beaucoup de mémoire. Une solution est d'utiliser une méthode mixte, en écrivant le contenu de l'accumulateur de phase sous la forme $A = A_1 b^M + A_0$, avec $A_0 = 0 \ldots b^M - 1$ et $A_1 = 0 \ldots b^{N-M} - 1$ pour $M = 1 \ldots N-1$. Les deux nombres A_0 et A_1 obtenus permettent d'indexer deux tables M_0 et M_1, définies par $M_0(k)=e^{2\pi j\frac{k}{Q}}$ pour $k=0...b^M-1$, et $M_1(k)=e^{2\pi jk\frac{b^M}{Q}}$ pour $k=0...b^{N-M}-1$. En effectuant le produit des valeurs indexées par les accumulateurs partiels A_0 et A_1, on obtient $M_0(A_0)\cdot M_1(A_1)=e^{2\pi jA_1\frac{b^M}{Q}}e^{2\pi j\frac{A_0}{Q}}=e^{2\pi j\frac{A_1b^M+A_0}{Q}}=e^{2\pi j\frac{A}{Q}}$, qui la valeur recherchée. Au prix d'une multiplication complexe supplémentaire, on a réduit la mémoire nécessaire de $Q=b^N$ éléments à $b^{N-M}+b^M$. En pratique, l'accumulateur est constitué de deux registres distincts A_0 et A_1 et l'ajout de l'incrément de phase se calcule modulo b^M pour A_0, modulo b^{N-M} pour A_1, avec gestion de la retenue de A_0 vers A_1.

On peut évidemment réitérer le procédé pour obtenir jusqu'à N tables de b éléments, et en utilisant $N-1$ multiplications complexes.

Si b contient un facteur 2, la taille des tables peut être réduite par 2 en utilisant la symétrie par rotation de π (inversion de signe du contenu de la table). De même pour un facteur 4, par rotation de $\frac{\pi}{2}$ (inversions de signe et permutation des parties réelle et imaginaire).

La gestion de l'arithmétique modulo b ($b\neq 2$) est contraignante dans le cas général et peut limiter les performances (en vitesse) du NCO. De même, la taille des blocs mémoire alloués dans un FPGA est une puissance de 2 : une table de taille b^M sous-utilise le bloc alloué.

3. EXTENSION AU PRODUIT DE DEUX NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

Si Q n'est pas premier ou une puissance d'un nombre premier, on peut écrire $Q=UV$, avec U et V entiers premiers entre eux. Le NCO travaillant modulo Q peut alors être créé à partir de deux NCO travaillant modulo U et modulo V. Ces NCO élémentaires permettent de générer les fréquences $f_u=u\frac{f_e}{U}$, $u=0...U-1$, et $f_v=v\frac{f_e}{V}$, $v=0...V-1$.

Le produit des sorties des deux NCO permet d'obtenir les fréquences $f_{u,v}=u\frac{f_e}{U}+v\frac{f_e}{V}$,

soit $f_{u,v}=f_e\left(\frac{u}{U}+\frac{v}{V}\right)=(u\cdot V+v\cdot U)\frac{f_e}{UV}=(u\cdot V+v\cdot U)\frac{f_e}{Q}$.

Comme U et V sont premiers entre eux, il existe p et q tels que $p\cdot V+q\cdot U=1$ (théorème de Bézout).

Deux tels nombres peuvent par exemple être obtenus par l'algorithme d'Euclide étendu $(p,q,r)=PGCD_e(U,V)$, qui est le suivant :

$$\begin{cases} r_0 = V \\ p_0 = 1 \\ q_0 = 0 \\ r_0' = U \\ p_0' = 0 \\ q_0' = 1 \end{cases} \text{ et tant que } r_i' \neq 0 : \begin{cases} s_{i+1} = r_i \div r_i' \\ r_{i+1} = r_i' \\ p_{i+1} = p_i' \\ q_{i+1} = q_i' \\ r_{i+1}' = r_i - s_{i+1} r_i' = r_i \bmod r_i' \\ p_{i+1}' = p_i - s_{i+1} p_i' \\ q_{i+1}' = q_i - s_{i+1} q_i' \end{cases}$$

En fin d'exécution, on peut prendre : $p = p_i$, $q = q_i$ et $r = r_i$.

On alors : $pV + qU = r = PGCD(U,V)$, soit donc $pV + qU = 1$ si U et V sont premiers entre eux.

Une porteuse pour la fréquence $f_c = f_e \frac{P}{Q}$ pour $P = 0...Q-1$ est alors générée en prenant :

$u = (P \cdot p) \bmod U$ et $v = (P \cdot q) \bmod V$

4. CAS GENERAL

Dans le cas général, la génération d'un signal à la fréquence exacte $\frac{P}{Q} f_e$, P et Q entiers positifs avec $P < Q$, peut se faire selon la procédure suivante :

- décomposition de Q en facteurs premiers : $Q = \prod_{m=1}^{M} Q_m^{R(m)}$, où les Q_m sont M nombres premiers distincts.
- construction d'un ensemble de M NCOs élémentaires travaillant modulo $Q_m^{R(m)}$.
- Calcul des incréments de phase u_m pour chacun des NCO élémentaires, par $M-1$ itérations de la méthode du paragraphe précédent, avec par exemple :

$$v_0 = P \text{ et } \begin{cases} U_m = Q_m^{R(m)} \\ V_m = \prod_{k=m+1}^{M} Q_k^{R(k)} \\ P_m = v_{m-1} \\ (p_m, q_m, r_m) = PGCD_e(U_m, V_m) \\ u_m = (P_m p_m) \bmod U_m \\ v_m = (P_m q_m) \bmod V_m \end{cases} \text{ pour } m = 1..M-1, \text{ puis } u_M = v_{M-1}.$$

Ce principe de génération est limité par la taille maximale des tables, qui est au minimum $\max_m (Q_m)$, c'est-à-dire la valeur du plus grand facteur premier de Q. Si un NCO élémentaire est lui-même constitué d'un ensemble de plusieurs NCO de même facteur premier, un calcul supplémentaire est requis pour calculer les incréments de phase de chacun de ces « sous-NCO » (voir paragraphe suivant).

Le temps de calcul d'un échantillon de sortie du NCO global peut nécessiter un nombre conséquent d'opérations ; dans le cadre d'une implémentation en FPGA, ces opérations peuvent être gérées en « pipeline », et le débit de sortie reste élevé, limité en pratique par le calcul des multiplications complexes et les mises à jour des sous-accumulateurs des NCO de même facteur premier (propagation des retenues). Dans un FPGA, l'initialisation du NCO global à une phase prédéterminée (nulle) nécessite également la propagation inverse de l'impulsion de réinitialisation le long du pipeline, pour compenser les retards en sortie des différents NCO.

5. EXTENSION AU PRODUIT DE M NOMBRES QUELCONQUES

En autorisant la propagation d'une retenue entre les accumulateurs de phase de plusieurs NCO et à condition de gérer des tables représentant une fraction de tour, on peut également obtenir par simple produit un NCO global de taille égale au produit des tailles des NCO élémentaires. La contrainte de propagation de retenue peut entraîner une baisse de de la fréquence de travail maximale dans un FPGA.

La génération d'un signal à la fréquence $\frac{P}{Q}f_e$, avec $Q=\prod_{m=1}^{M}Q_m$, P et Q entiers positifs et $P<Q$, peut se faire selon la procédure suivante :

On considère que le NCO d'indice 0 est le poids faible, le NCO d'indice $M-1$ est le poids fort.
Les tables de valeurs des NCO sont définies par :

$$T_m(k)=e^{j2\pi\frac{k}{\prod_{l=m}^{M-1}Q_l}} \text{ pour } 0\le k<Q_m.$$

Hormis le NCO de poids fort, la table du NCO m contient Q_m valeurs échelonnées entre l'angle 0 et l'incrément de phase minimal du NCO $m+1$, soit $\frac{2\pi}{\prod_{l=m+1}^{M-1}Q_l}$.

Soit $a_m(n)$ la valeur courante de l'accumulateur du NCO d'indice m ; on a : $0\le a_m(n)<Q_m$.

Soit $d_m(n)$ l'incrément de phase du NCO d'indice m ; on a : $0\le d_m(n)<Q_m$.

A l'intant n, la sortie du NCO global est le produit des sorties des NCO :

$$y(n)=\prod_{m=0}^{M-1}T_m(a_m(n))=\prod_{m=0}^{M-1}e^{j2\pi\frac{a_m(n)}{\prod_{l=m}^{M-1}Q_l}}=e^{j2\pi\sum_{m=0}^{M-1}\frac{a_m(n)}{\prod_{l=m}^{M-1}Q_l}}=e^{j2\pi\frac{a_0(n)+\sum_{m=1}^{M-1}\left[a_m(n)\prod_{l=0}^{m-1}Q_l\right]}{\prod_{l=0}^{M-1}Q_l}}=e^{j2\pi\frac{a_0(n)+\sum_{m=1}^{M-1}\left[a_m(n)\prod_{l=0}^{m-1}Q_l\right]}{Q}}$$

A l'instant n l'incrément de phase du NCO global est :

$$d(n)=d_0(n)+\sum_{m=1}^{M-1}\left[d_m(n)\prod_{l=0}^{m-1}Q_l\right], \text{ avec } 0\le d(n)<Q.$$

Le calcul des accumulateurs à l'instant n+1 s'écrit $a_m(n+1)=a'_m(n+1)\bmod Q_m$, avec :

$$a'_0(n+1)=a_0(n)+d_0(n)$$
$$a'_1(n+1)=a_1(n)+d_1(n)+\delta\left(a'_0(n+1)\ge Q_0\right)$$
$$\ldots$$
$$a'_{M-1}(n+1)=a_{M-1}(n)+d_{M-1}(n)+\delta\left(a'_{M-2}(n+1)\ge Q_{M-2}\right)$$

avec $\delta(v)$ =1 si v est vrai, 0 sinon (retenue).

6. CAS PARTICULIER DE LA RAMPE DE FREQUENCE

On cherche ici à générer une rampe de fréquence via un NCO travaillant modulo Q, la fréquence variant linéairement avec le temps. Pour ce faire, on modifie à chaque échantillon l'incrément de phase.

La valeur de l'accumulateur A du NCO et son incrément s'écrivent :

$$\begin{cases} A(n) = \left[A(n-1) + \Delta A(n) \right] \operatorname{mod} Q \\ \Delta A(n) = \Delta A(n-1) + \Delta^2 A \end{cases}$$

$\Delta A(n)$ est l'incrément de phase instantané

$\Delta^2 A$ est l'incrément de fréquence (supposé constant pour une rampe linéaire)

On peut écrire :

$$A(n) = \left[A(n-1) + \Delta A(0) + n\Delta^2 A \right] \operatorname{mod} Q$$

$\Delta A(0)$ est l'incrément de phase initial (fréquence de départ)

ou encore :

$$A(n) = \left[A(0) + n\Delta A(0) + \frac{n(n-1)}{2} \Delta^2 A \right] \operatorname{mod} Q$$

$A(0)$ est la phase initiale

$\Delta A(0)$ est l'incrément de phase initial (fréquence de départ)

Pour une rampe de durée N échantillons, l'amplitude est $(N-1)\Delta^2 A$ (différence des fréquences finale et initiale).

Avec une fréquence d'échantillonnage f_e, une phase initiale φ_0, une fréquence de départ f_0, une fréquence de fin f_1, une durée T_r :

$$A(0) = arrondi\left(Q \frac{\varphi_0}{2\pi} \right)$$

$$\Delta A(0) = arrondi\left(Q \frac{f_0}{f_e} \right)$$

$$N = arrondi\left(f_e T_r \right)$$

$$\Delta^2 A = arrondi\left(Q \frac{f_1 - f_0}{(N-1) f_e} \right)$$

Si l'on ajoute la contrainte de continuité de phase entre le début et la fin de la rampe pour une rampe périodique (les valeurs initiales sont rechargées tous les N échantillons), on a : $A(N) = A(0)$,

soit $A(0) = \left[A(0) + N\Delta A(0) + \frac{N(N-1)}{2} \Delta^2 A \right] \operatorname{mod} Q$

ou encore $\left[N\Delta A(0) + \frac{N(N-1)}{2}\Delta^2 A \right] \bmod Q = 0$

Une condition suffisante particulière est :

Q multiple de $N(N-1)$

et $\Delta A(0)$ multiple de $\frac{Q}{N}$

et $\Delta^2 A$ multiple de $2\frac{Q}{N(N-1)}$

qui peut aussi s'écrire :

$Q = KN(N-1)$

et f_0 multiple de $\frac{f_e}{N}$

et (f_1- f_0) multiple de $2\frac{f_e}{N}$

7. NOTES

Extrait du document interne 010-NT-001A de Mars 2013.